

14. Ol'shanskii V. P., Spol'nik O., Slipchenko M., Znaidiuk V. Modeling the elastic impact of a body with a special point at its surface. *East-European Journal of Enterprise technologies*. 2019, no. 1/7 (97), pp. 25–32. DOI: 10.15587/1729-4061.2019.155854
15. Gendelman O., Vakakis A. F. Transition from localization to nonlocalization in strongly nonlinear damped oscillators. *Chaos, Solitons and Fractals*. 2000, vol. 11, no. 10, p. 1535–1542. DOI: 10.1016/S0960-0779(99)00076-4
16. Cveticanin L., Pogany T. Oscillator with a Sum of Noninteger-Order Nonlinearities. *Journal of Applied Mathematics*. 2012, vol. 1, Article ID-649050, 20 p. DOI: 10.1155/2012/649050

Надійшла (received) 17.10.2019

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

**Ольшанський Василь Павлович (Ольшанский Василий Павлович, Olshanskiy Vasilii Pavlovich)** – доктор фізико-математичних наук, професор, Харківський національний технічний університет сільського господарства імені П. Василенка, м. Харків; тел.: (066) 010-09-55.; e-mail: OlshanskiyVP@gmail.com.

УДК 534.1:539.3

**В. П. ОЛЬШАНСЬКИЙ, С. В. ОЛЬШАНСЬКИЙ****ПРО ОБМЕЖЕНУ ТРИВАЛІСТЬ ВІЛЬНИХ КОЛИВАНЬ ОСЦИЛЯТОРА З НЕЛІНІЙНО В'ЯЗКИМ ОПОРОМ**

Показано, що при дії сили степеневно-нелінійного в'язкого опору лінійно пружний осцилятор може мати область застою вільних коливань, як і при дії сили сухого тертя Кулона. Тоді, отримавши задане початкове відхилення від положення рівноваги, такий осцилятор здійснює обмежену кількість розмахів, тобто його вільні коливання проходять на скінченному проміжку часу, що зазвичай спостерігається на практиці. В цьому принципова відмінність коливань розглянутого нелінійного осцилятора від класичного дисипативного лінійного, де вільні затухаючі коливання тривають у часі до нескінченності, бо відсутня область застою. З'ясовано умови, коли сила нелінійного в'язкого опору призводить до появи області застою. Наведено приклади розрахунків вільних коливань і проведено порівняння результатів, одержаних різними способами.

**Ключові слова:** вільні коливання, нелінійно-в'язке тертя, можливість застою коливань, метод енергетичного балансу.

**В. П. ОЛЬШАНСКИЙ, С. В. ОЛЬШАНСКИЙ****ОБ ОГРАНИЧЕННОЙ ПРОДОЛЖИТЕЛЬНОСТИ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ ОСЦИЛЛЯТОРА С НЕЛИНЕЙНО ВЯЗКИМ СОПРОТИВЛЕНИЕМ**

Показано, что при действии силы степенного нелинейного вязкого сопротивления линейно упругий осциллятор может иметь область застоя свободных колебаний, как и при действии силы сухого трения Кулона. Тогда, получив заданное начальное отклонение от положения равновесия, такой осциллятор совершает ограниченное количество размахов, то есть его свободные колебания происходят на конечном промежутке времени, что обычно наблюдается на практике. В этом принципиальное отличие колебаний рассмотренного нелинейного осциллятора от классического диссипативного линейного, где свободные колебания продолжаются до бесконечности, поскольку отсутствует область застоя. Определены условия, когда сила нелинейного вязкого сопротивления приводит к появлению области застоя. Приведены примеры расчетов свободных колебаний и проведено сравнение результатов, полученных разными способами.

**Ключевые слова:** свободные колебания, нелинейно-вязкое трение, возможность застоя колебаний, метод энергетического баланса.

**V. P. OLSHANSKIY, S. V. OLSHANSKIY****ON LIMITED DURATION OF OSCILLATIONS OF FREE OSCILLATOR WITH NONLINEAR VISCOUS RESISTANCE**

It is shown that under the action of the force of nonlinear viscous resistance, a linearly elastic oscillator can have a stagnation region of free oscillations, as under the action of the Coulomb's dry friction force. Then, having received a given initial deviation from the equilibrium position, such an oscillator performs a limited number of swings, i. e., its free oscillations occur over a finite period of time, which is usually observed in practice. This is the fundamental difference between the oscillations of the considered nonlinear oscillator and the classical dissipative linear one, where free oscillations continue infinitely, since there is no stagnation region. The conditions are determined when the force of nonlinear viscous resistance leads to the appearance of a stagnation region. Examples of calculations of free oscillations are given and the results obtained by applying different methods are compared.

**Key words:** free oscillations, nonlinear-viscous friction, the possibility of stagnation of oscillations, the energy balance method.

**Вступ.** Як відомо, зміна амплітуд вільних коливань у часі в лінійного в'язкопружного осцилятора відбувається за експоненціальним законом, а тривалість коливань не обмежена у часі. На практиці вільні коливання будь-якого осцилятора завжди зводяться до обмеженої кількості розмахів, а розбіжність теорії з практикою час-то намагаються пояснити додатково наявністю сили сухого тертя. Але виявляється, що за певних обставин обмежену кількість розмахів нелінійний в'язкопружний осцилятор може мати і при відсутності сили сухого тертя. З'ясування умов такої можливості складає предмет даної роботи.

**Огляд літературних джерел.** Вільні затухаючі коливання лінійного в'язкопружного осцилятора висвітлені

© В. П. Ольшанський, С. В. Ольшанський, 2019

в багатьох виданнях з теоретичної механіки [1, 2] та теорії коливань [3, 4]. В [4] розглянуто вільні коливання осцилятора при спільній дії лінійного в'язкого опору і сили сухого тертя. Розв'язок задачі подано на фазовій площині. Спільна дія сил лінійно в'язкого опору та сили сухого тертя Кулона вивчалась також в [5, 6]. В цих публікаціях методом припасовування побудовано точні розв'язки диференціального рівняння руху та одержано наближені розв'язки задачі методом енергетичного балансу. Порівняння чисельних результатів, одержаних двома способами, підтвердило придатність наближеного методу до розрахунку вільних затухаючих коливань. Метод енергетичного балансу раніше застосовано в [7] до аналізу руху осцилятора при наявності нелінійної сили в'язкого опору. Саме цю методику використаємо і в даній роботі, складаючи баланс енергій за один розмах осцилятора. Зазначимо, що в [7] складали баланс енергій за один цикл коливань.

**Диференціальне рівняння обвідної графіка коливань і його розв'язок.** Рівняння вільних коливань осцилятора має вигляд:

$$m\ddot{x} + K|\dot{x}|^v \operatorname{sign}(\dot{x}) + cx = 0, \quad (1)$$

де  $m, c$  – відповідно маса і жорсткість осцилятора;  $K$  – коефіцієнт в'язкого опору;  $v \geq 0$  – показник нелінійності опору;  $x(t)$  – відхилення осцилятора від положення рівноваги  $x = 0$ ; крапка над  $x$  означає похідну за часом  $t$ .

За твердженням автора [7] рівняння (1) не може бути розв'язане аналітично в замкненій формі. Тому тут теж обмежимося наближеним аналізом коливального процесу.

Розглянемо  $i$ -й розмах коливань з екстремальними відхиленнями  $x = -a_{i-1}$  і  $x = a_i$ , причому  $a_i < a_{i-1}$ . Зміна потенціальної енергії  $\Delta\Pi$  на цьому проміжку руху становить:

$$\Delta\Pi = \frac{c}{2}(a_i^2 - a_{i-1}^2) < 0. \quad (2)$$

Робота сили в'язкого опору  $A_{OP}$  визначається інтегралом:

$$A_{OP} = -K \int_{-a_{i-1}}^{a_i} |\dot{x}|^v \operatorname{sign}(\dot{x}) dx,$$

який обчислимо наближено. Для цього, дотримуючись [7], припускаємо, що закон руху залишається таким як і при відсутності опору, тобто:

$$x(t) = -a \cos(\omega t), \quad a = \frac{1}{2}(a_{i-1} + a_i), \quad \omega = \sqrt{\frac{c}{m}}.$$

Тоді:

$$\dot{x} = a\omega \sin(\omega t); \quad dx = \dot{x}dt = a\omega \sin(\omega t)dt; \quad A_{OP} = -K(a\omega)^{v+1} \int_0^{\pi/\omega} (\sin \omega t)^{v+1} dt.$$

Інтеграл тут виражається через *Гама-функцію*  $\Gamma(z)$  по формулі [8]:

$$\int_0^{\pi} (\sin z)^{v+1} dz = \frac{\Gamma\left(\frac{v+2}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v+3}{2}\right)}.$$

Тому:

$$A_{OP} \approx -Ka^{v+1}\omega^v \frac{\Gamma\left(\frac{v+2}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v+3}{2}\right)}. \quad (3)$$

Щоб вивести диференціальне рівняння обвідної лінії, наближено приймемо, що:

$$a_i - a_{i-1} \approx \frac{\pi}{\omega} \frac{da}{dt}. \quad (4)$$

Враховуючи (2) і (4), одержуємо:

$$\Delta\Pi \approx ca \frac{\pi}{\omega} \frac{da}{dt}. \quad (5)$$

Оскільки за умовою енергетичного балансу  $\Delta\Pi = A_{OP}$ , то, прирівнявши праві частини виразів (3) і (5), приходимо до рівняння:

$$\frac{da}{dt} = -ba^v, \quad (6)$$

$$\text{в якому: } b = \frac{K \omega^{v+1}}{\pi c} \frac{\Gamma\left(\frac{v+2}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v+3}{2}\right)}.$$

Позначивши символом  $a_0$  початкове відхилення осцилятора на першому розмаху, інтегруванням (6) отримуємо:

$$a = \begin{cases} \left[ a_0^{1-v} - b(1-v)t \right]^{\frac{1}{1-v}} & \text{при } v \neq 1, \\ a_0 \exp(-bt) & v = 1. \end{cases} \quad (7)$$

Підкреслимо, що у випадку  $v = 1$  маємо:  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ ;  $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ ;  $\Gamma(2) = 1$ ;  $b = \frac{K}{2m}$ . Одержаний наближено вираз  $a$  в (7) співпадає з точним.

На думку автора [7] практична цінність формули (7) полягає в тому, що, використовуючи її, значення констант  $v$  і  $b$  можна знайти обробкою експериментальних осцилограм, а потім задіяти їх у розрахунках вимушених, в тому числі резонансних, коливань. Доповнюючи цей вислів, підкреслимо і важливу теоретичну значимість формули (7). Із неї при  $0 \leq v < 1$  випливає, що вираз в квадратних дужках може дорівнювати нулю:  $a_0^{1-v} - b(1-v)t = 0$ . Це рівняння має корінь:

$$t_0 = \frac{a_0^{1-v}}{b(1-v)},$$

яким обмежена тривалість руху осцилятора, тобто коливальний рух його проходить лише на обмеженому проміжку часу  $t \in (0; t_0)$ . Такої властивості осцилятор немає при  $v \geq 1$ . Таким чином, доводиться говорити про існування області застою осцилятора з в'язким опором, окремий випадок якого  $v = 0$  відповідає дії сили сухого тертя.

Використовуючи (7), можна обчислити екстремальні відхилення осцилятора, які зменшуються в ході руху. Так в кінці  $i$ -го розмаху екстремальне відхилення становить:

$$a_i = \begin{cases} \left[ a_0^{1-v} - b(1-v) \frac{i\pi}{\omega} \right]^{\frac{1}{1-v}} & v \neq 1, \\ a_0 \exp\left(-\frac{K}{2} \frac{i\pi}{\sqrt{cm}}\right) & v = 1. \end{cases} \quad (8)$$

У випадку  $0 \leq v < 1$  кількість повних розмахів  $n$  обмежена нерівністю:

$$n \leq \text{ціла частина } \frac{a_0^{1-v} \omega}{\pi(1-v)b},$$

яка відноситься до наближених результатів.

**Рекурентні співвідношення для розрахунку амплітуд розмахів.** Вище використовували наближені вирази  $\Delta P$  і  $A_{OP}$  при складанні диференціального рівняння обвідної графіка коливань. Але розрахунки можна проводити і без спрощення виразу  $\Delta P$ . Тоді енергетичний баланс подається рівнянням:

$$a_i + a_{i-1} = 2a_{i-1} - \lambda(a_i + a_{i-1})^v, \quad (9)$$

у якому:

$$\lambda = \frac{K \omega^v}{2^v c} \frac{\Gamma\left(\frac{v+2}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v+3}{2}\right)}. \quad (10)$$

Рівняння (9) дає можливість обчислити  $a_i$ , якщо відомо значення  $a_{i-1}$ . Для довільних  $v$  його розв'язок доводиться будувати чисельним методом. Наприклад, можна використати ітераційну схему Ньютона, за якою:

$$A_{ij+1} = A_{ij} - \frac{A_{ij} + \lambda A_{ij}^v - 2a_{i-1}}{1 + \lambda v A_{ij}^{v-1}} = \frac{2a_{i-1} - \lambda(1-v)A_{ij}^v}{1 + \lambda v A_{ij}^{v-1}}; \quad j = 0, 1, 2, \dots; \quad A_{i0} = 2a_{i-1}; \quad A_i = a_i + a_{i-1}. \quad (11)$$

де  $A_i$  – величина  $i$ -го розмаху.

Обчисливши з заданою точністю  $A_{ij+1}$ , далі легко знайти  $a_i$ , бо  $a_i = A_{ij+1} - a_{i-1}$ .

Поряд з цим існують такі значення  $\nu$ , для яких рівняння (9) зводяться до рекурентного співвідношення. Розглянемо їх окремо.

Випадок  $\nu = 0$ . Для нього (9) переходить в:

$$a_i = a_{i-1} - \frac{2K}{c}, \quad i = 1, 2, \dots$$

Це відоме точне рекурентне співвідношення виконується при дії сили сухого тертя, коли зона застою становить  $|x| \leq K/c$ .

Випадок  $\nu = 1/3$ . Рівняння (9) набуває вигляд:

$$z_i^3 + \lambda z_i - 2a_{i-1} = 0. \quad (12)$$

Тут  $z_i = \sqrt[3]{a_i + a_{i-1}}$ ;  $\lambda = \frac{K}{c} \frac{\Gamma\left(\frac{7}{6}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{3}\right)} \sqrt[3]{\frac{\omega}{2}}.$

Інтерполяцією табличних даних в [9] знаходимо, що:  $\Gamma(7/6) \approx 0,927723$ ;  $\Gamma(5/3) \approx 0,902745$ . Тому:

$$\lambda \approx 1,44572 \frac{K}{c} \sqrt[3]{\omega}.$$

Розв'язок кубічного рівняння (12) подається формулами Кардано [10]:

$$z_i = \sqrt[3]{a_{i-1} + \sqrt{Q_i}} - \sqrt[3]{\sqrt{Q_i} - a_{i-1}}, \quad (13)$$

де  $Q_i = a_{i-1}^2 + \left(\frac{\lambda}{3}\right)^3.$

Обчисливши  $z_i$ , далі легко знайти  $a_i$ , бо  $a_i = z_i^3 - a_{i-1}$ .

Випадок  $\nu = \frac{1}{2}$ . Рівняння (9) зводиться до квадратного:

$$y_i^2 + \lambda y_i - 2a_{i-1} = 0,$$

у якому:

$$y_i = \sqrt{a_i + a_{i-1}}; \quad \lambda = \frac{K}{c} \frac{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{7}{4}\right)} \sqrt{\frac{\omega}{2}}.$$

Згідно з таблицею в [9, 11]  $\Gamma(5/4) \approx 0,906402$ ;  $\Gamma(7/4) \approx 0,919063$ . Тому:

$$\lambda \approx 1,23605 \frac{K}{c} \sqrt{\omega}.$$

Значення  $a_i$  подається рекурентним співвідношенням:

$$a_i = \left( \sqrt{\frac{1}{4} \lambda^2 + 2a_{i-1}} - \frac{\lambda}{2} \right)^2 - a_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (14)$$

Випадок  $\nu = 1$ . Рівняння (9) стає лінійним, з якого випливає рекурентне співвідношення:

$$a_i = a_{i-1} \frac{1 - \lambda}{1 + \lambda}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (15)$$

причому  $\lambda = \frac{K\pi\omega}{4c} = \frac{K\pi}{4\sqrt{cm}}$ . Тут прийняли до уваги що в (10)  $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ .

Підкреслимо, що при  $\nu = 1$  існує точний розв'язок задачі:

$$a_i = a_{i-1} \exp\left(-\frac{K\pi}{2\sqrt{cm}}\right) = a_{i-1} \exp(-2\lambda).$$

Похибка формули (15) визначається похибкою апроксимації:

$$\exp\left(-\frac{K\pi}{2\sqrt{cm}}\right) \approx \frac{4\sqrt{cm} - K\pi}{4\sqrt{cm} + K\pi}.$$

В [6] обчислено, що при  $\lambda = 0,15$  похибка цієї апроксимації становить 0,229 %, а при  $\lambda = 0,25 - 1,078$  %, а при  $\lambda = 0,35 - 2,156$  %.

тобто для малих  $\lambda$  наближена формула (15) цілком придатна для розрахунків.

Випадок  $\nu = 2$ , що називають гідродинамічним або турбулентним демпфуванням [7]. Рівняння (9) зводиться до квадратного:

$$\lambda \xi_i^2 + \xi_i - 2a_{i-1} = 0,$$

у якому:

$$\xi_i = a_i + a_{i-1}; \quad \lambda = \frac{K\omega^2}{4c} \frac{\Gamma(2) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)} = \frac{K}{3m}.$$

Тут враховували, що  $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{4} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ .

Екстремальні відхилення на  $i$ -ому розмаху пов'язані рекурентним співвідношенням:

$$a_i = \sqrt{\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{2}{\lambda} a_{i-1}} - \frac{1}{2\lambda} - a_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (16)$$

Воно не залежить від жорсткості осцилятора  $c$ .

Рівняння (9) має замкнений аналітичний розв'язок і при  $\nu = 3$ , бо зводиться до кубічного:

$$\xi_i^3 + \frac{1}{\lambda} \xi_i - \frac{2}{\lambda} a_{i-1} = 0,$$

де  $\lambda = \frac{K\omega^3}{8c} \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(3)} = \frac{3K\pi\omega^3}{63c}.$

За формулами Кардано отримуємо співвідношення:

$$a_i = \sqrt[3]{\frac{1}{\lambda} a_{i-1} + \sqrt{S_i}} - \sqrt[3]{\sqrt{S_i} - \frac{1}{\lambda} a_{i-1}} - a_{i-1},$$

в якому:

$$S_i = \frac{1}{\lambda^2} \left( a_{i-1}^2 + \frac{1}{27\lambda} \right), \quad i = 1, 2, \dots$$

Отже для розглянутих  $\nu$  можна обійтись без ітерацій в (11).

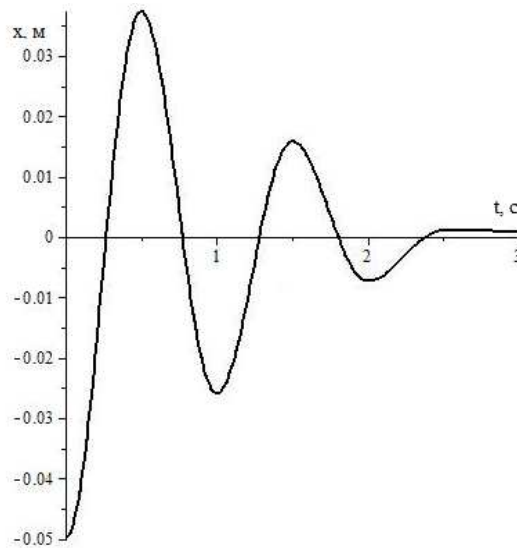
**Чисельні результати та їх порівняння.** Для проведення розрахунків приймаємо:  $m = 1$  кг,  $c = 4\pi^2$  Н/м,  $K = 0,4$  Н/(с/м)<sup>2</sup>;  $a_0 = 0,05$  м і різні значення  $\nu$ .

**Приклад 1.** Задаємо  $\nu = 0,3$ . Користуючись формулами (8) і (13), знаходимо послідовності амплітуд до повної зупинки осцилятора. Їх запишемо в табл. 1.

Таблиця 1 – Послідовності амплітуд коливань при  $\nu = 0,3$

$i$	Формула (8)	Формула (13)	Чисельне інтегрування
	Значення $10^2 a_i$ , м		
0	5,000	5,000	5,000
1	3,799	3,798	3,798
2	2,714	2,711	2,711
3	1,758	1,752	1,752
4	0,952	0,942	0,942
5	0,331	0,313	0,314

Для порівняння, в останній колонці табл. 1 вказано значення  $a_i$ , одержані чисельним інтегруванням диференціального рівняння (1) на комп'ютері. Їх можна вважати умовно точними. Як бачимо, формула (13) дає більш точні результати, ніж формула (8). Графік коливань осцилятора, що відповідає прийнятим числовим даним, подано на рис. 1. Чисельне інтегрування рівняння (1) підтверджує, що після п'яти розмахів, з перетином положення  $x = 0$ , осцилятор попадає в область застою.

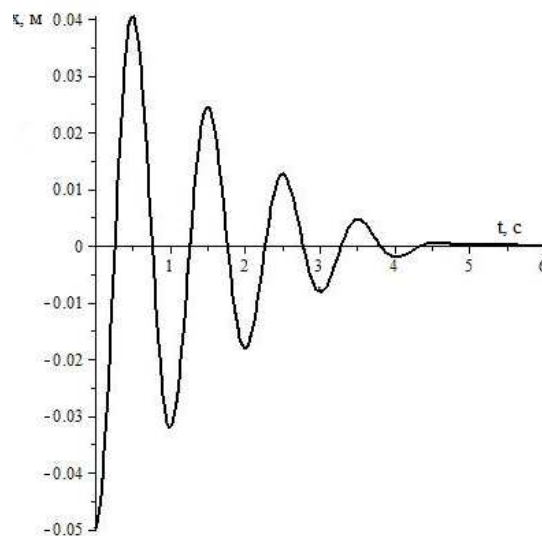
Рис. 1 – Графік коливань при  $\nu = 0,3$ .

**Приклад 2.** Проведемо аналогічні розрахунки при  $\nu = 0,5$ . Результати обчислень заносимо в табл. 2.

Таблиця 2 – Послідовності амплітуд коливань при  $\nu = 0,5$ 

$i$	Формула (8)	Формула (13)	Чисельне інтегрування
	Значення $10^2 a_i$ , м		
0	5,000	5,000	5,000
1	4,057	4,055	4,056
2	3,212	3,209	3,210
3	2,465	2,462	2,462
4	1,818	1,813	1,813
5	1,268	1,262	1,263
6	0,818	0,810	0,811
7	0,465	0,457	0,458
8	0,212	0,202	0,203
9	0,057	0,046	0,046
10	$2,6 \cdot 10^{-4}$	–	–

І в цьому випадку формула (14) має більшу точність, ніж формула (8), яка дає хоч і малий, але зайвий останній розмах. У табл. 2 спадання амплітуд повільніше, ніж у табл. 1. Графіки коливань, одержані чисельним інтегруванням рівняння (1) на комп'ютері при  $\nu = 0,5$  подано на рис. 2.

Рис. 2 – Графік коливань при  $\nu = 0,5$ .

Розрахунки підтвердили, що у випадку  $0 \leq \nu < 1$  вільні коливання осцилятора мають обмежену кількість розмахів, як і при дії сили сухого тертя. Якщо ж  $\nu \geq 1$ , то кількість розмахів і тривалість коливань необмежені.

Таблиця 3 – Наближені та точні значення амплітуд при  $\nu = 2$ 

$i$	Формула (17)	в [14]	$i$	Формула (17)	в [14]
	Значення $20Ka_i$			Значення $20Ka_i$	
0	3,301	3,301	6	1,418	1,420
1	2,701	2,704	7	1,296	1,298
2	2,286	2,290	8	1,192	1,194
3	1,982	1,986	9	1,104	1,106
4	1,750	1,753	10	1,029	1,030
5	1,567	1,570	11	0,963	0,964

**Приклад 3.** З метою з'ясування похибок наближеного методу при  $\nu > 1$ , проведемо порівняння чисельних результатів, до яких призводить формула (16) і точний розв'язок рівняння (1) при  $\nu = 2$ . Його в [12] виражено через функцію Ламберта, таблиці якої надруковано в [13]. Тут скористаємося точними чисельними даними роботи [14], зведеними там в таблицю при  $K = 0,5 \text{ Н/(с/м)}^2$ . Для випадку  $m = 1 \text{ кг}$  формулі (16) надаємо вигляд:

$$2Ka_i = \sqrt{9 + 12(2Ka_{i-1})} - 3 - 2Ka_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (17)$$

Одержані при  $2Ka_0 = 0,3301$  результати заносимо в табл. 3.

Порівняння підтверджує, що метод енергетичного балансу має невеликі похибки і при  $\nu > 1$ .

**Перспективи подальших досліджень.** В моделі коливань використали одночленний вираз сили опору, вважаючи, що вона пропорційна степеню швидкості руху. Викладений наближений метод дослідження дозволяє розглядати і більш складні варіанти опору. Тому перспективою подальших досліджень передбачено вивчення особливостей вільних коливань осцилятора, в якого сила опору складається з лінійного та нелінійного доданків, що буде узагальненням результатів, одержаних в цій роботі.

**Висновки.** Методом енергетичного балансу виведено наближені формули для розрахунку амплітуд вільних затухаючих коливань нелінійного осцилятора з різними варіантами в'язкого опору.

Встановлено умови, коли лінійно пружний осцилятор з в'язким тертям має обмежену кількість розмахів при вільних коливаннях.

Проведено порівняння чисельних результатів, одержаних різними методами, і показано узгодженість наближених і умовно точних результатів, отриманих чисельним комп'ютерним інтегруванням диференціального рівняння руху осцилятора.

#### Список літератури

1. Кузьо І. В., Зін'юк Я. А., Ванькович Т.-Н. М. Теоретична механіка. – Харків : Фоліо, 2017. – 780 с.
2. Лойцянский Л. Г., Лурье А. И. Курс теоретической механики. – Москва : Дрофа, 2006. – 720 с.
3. Василенко М. В., Алексейчук О. М. Теория колебаний и устойчивости движения. – Киев : Вища школа, 2004. – 525 с.
4. Бабаков И. М. Теория колебаний. – Москва : Дрофа, 2004. – 591 с.
5. Ольшанський В. П., Ольшанський С. В., Тищенко Л. М. Коливання дисипативних осциляторів. – Харків : Міськдрук, 2015. – 116 с.
6. Ольшанський В. П., Тищенко Л. М., Ольшанський С. В. Динаміка дисипативних осциляторів. – Харків : Міськдрук, 2016. – 264 с.
7. Пановко Я. Г. Основы прикладной теории колебаний и удара. – Ленинград : Машиностроение. 1976. – 320 с.
8. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. – М. : Наука, 1981. – 800 с.
9. Абрамович М., Стиган И. Справочник по специальным функциям (с формулами, графиками и математическими таблицами). – М. : Наука, 1979. – 832 с.
10. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике (для научных работников и инженеров). – М. : Наука, 1974. – 832 с.
11. Янке Е., Эмде Ф., Лёв Ф. Специальные функции. – Москва : Наука, 1977. – 344 с.
12. Ольшанський В. П., Ольшанський С. В. Функция Ламберта в задаче колебаний математического маятника // Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2014. – № 18 (1061). – С. 116 – 119.
13. Ольшанський В. П., Ольшанський С. В. Функция Ламберта в задачах баллистики материальной точки. – Харьков : Издатель Савчук В.О., 2013. – 204 с.
14. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – Москва : Наука, 1974. – 504 с.

#### References (transliterated)

1. Kuzio I. V., Zin'ko Y. A., Van'kovych T.-N. M. *Teoretychna mekhanika* [Theoretical mechanics]. Kharkiv, Folio Publ., 2017. 780 p.
2. Loytsyanskiy L. G., Lurie A. I. *Kurs teoreticheskoy mekhaniki* [The course in theoretical mechanics]. Moscow, Drofa Publ., 2006. 720 p.
3. Vasylenko M. V., Alekseychuk O. M. *Teoriya kolyvan' i stiykosti rukhu* [Theory of oscillations and stability of motion]. Kiev, Vyshha shkola Publ., 2004. 525 p.
4. Babakov I. M. *Teoriya kolebaniy* [Theory of fluctuations]. Moscow, Drofa Publ., 2004. 591 p.
5. Ol'shans'ky V. P., Ol'shans'ky S. V., Tishhenko L. N. *Kolyvannya dysypatyvnykh ostsilyatoriv* [Dissipative oscillator oscillations]. Kharkiv, Mis'kdruk Publ., 2015. 116 p.
6. Ol'shans'ky V. P., Tishhenko L. N., Ol'shans'ky S. V. *Dynamika dysypatyvnykh ostsilyatoriv* [Dynamics of Dissipative Oscillators]. Kharkiv, Mis'kdruk Publ., 2016. 264 p.

7. Panovko Ya. G. *Osnovy prikladnoy teorii kolebaniy i udara* [Fundamentals of the applied theory of oscillations and shock]. Leningrad, Mashinostroyeniye Publ., 1976. 320 p.
8. Prudnikov A. P., Brychkov Yu. A., Marichev O. I. *Integraly i ryady. Elementarnye funktsii* [Integrals and series. Elementary functions]. Moscow, Nauka Publ., 1981. 800 p.
9. Abramovits A., Stigan I. *Spravochnik po spetsial'nym funktsiyam (s formulami, grafikami i matematicheskimi tablitsami)* [Handbook of special functions (with formulas, graphs and mathematical tables)]. Moscow, Nauka Publ., 1979. 832 p.
10. Korn G., Korn T. *Spravochnik po matematike (dlya nauchnykh rabotnikov i inzhenerov)* [Handbook of Mathematics (for scientific workers and engineers)]. Moscow, Nauka Publ., 1974. 832 p.
11. Yanke E., Emde F., Lyosh F. *Spetsial'nye funktsii* [Special functions]. Moscow, Nauka Publ., 1977. 344 p.
12. Ol'shanskiy V. P., Ol'shanskiy S. V. Funktsiya Lamberta v zadache kolebaniy matematicheskogo mayatnika [The Lambert function in the problem of oscillations of a mathematical pendulum]. *Visnyk Natsional'noho tekhnichnoho universytetu «KhPI». Seriya : Matematichne modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyakh* [Bulletin of the National Technical University "KhPI". Series : Mathematical modeling in engineering and technology]. 2014, no. 18 (1061), pp. 116 – 119.
13. Ol'shanskiy V. P., Ol'shanskiy S. V. Funktsiya Lamberta v zadachakh ballistiki material'noy tochki [The Lambert function in ballistic problems of a material point]. Kharkiv, Savchuk V.O. Publ., 2013. 204 p.
14. Bogolyubov N. N., Mitropol'skiy Yu. A. *Asimptoticheskiye metody v teorii nelineynykh kolebaniy* [Asymptotic methods in the theory of nonlinear oscillations]. Moscow, Nauka Publ., 1974. 504 p.

Надійшло (received) 11.10.2019

## Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

**Ольшанський Василь Павлович (Ольшанский Василий Павлович, Olshanskiy Vasiliy Pavlovich)** – доктор фізико-математичних наук, професор, Харківський національний технічний університет сільського господарства імені П. Василенка, м. Харків; тел.: (066) 010-09-55.; e-mail: OlshanskiyVP@gmail.com.

**Ольшанський Станіслав Васильович (Ольшанский Станислав Васильевич, Olshanskiy Stanislav Vasilevich)** – кандидат фізико-математичних наук, Харківський національний технічний університет сільського господарства імені П. Василенка, м. Харків; тел.: (057) 343-29-41; email: stasolsh77@gmail.com.

UDC 519.6

**I. I. PERSHYNA, I. A. TOKMAKOVA****OPTIMAL CHOICE OF PLANES FOR PLACING TOMOGRAMS IN COMPUTED TOMOGRAPHY**

The solution of the problem of reconstructing the internal structure of a three-dimensional body by the known tomograms produced by a computer tomograph using interflatation of functions and blending approximation is proposed. The known methods of approximating functions of one and two variables by interpolation type piecewise constant splines using means and medians are also considered. The paper presents an algorithm for optimizing the choice of the planes in which the tomograms produced by a computer tomograph are placed. The case is considered when all the tomograms are parallel to each other. The algorithm developed uses approximations of objects by classical piecewise constant splines. The internal structure of a three-dimensional body (density or absorption coefficient) is assumed to be given by a function of three variables of the form  $h(x, y, z) = f(x)g(y, z)$ , where  $g$  is an arbitrary function, provided that  $f$  is a monotone function on a closed segment. The method of optimal choice of the planes for placing the tomograms is implemented using MathCad computer software.

**Key words:** tomograms, piecewise constant splines, interflatation, blending approximation.

**Ю. І. ПЕРШИНА, І. А. ТОКМАКОВА****ОПТИМАЛЬНИЙ ВИБІР ПЛОЩИН, НА ЯКИХ РОЗМІЩЕНІ ТОМОГРАМИ, В КОМП'ЮТЕРНІЙ ТОМОГРАФІЇ**

Представлено розв'язок задачі відновлення внутрішньої структури тривимірного тіла за відомими томограмами, що поступають з комп'ютерного томографа, за допомогою інтерфлетатції функцій та мішаної апроксимації. Розглянуто також відомі методи наближення функцій однієї та двох змінних кусково-сталими сплайнами інтерполяційного типу, з використанням середніх та медіан. В статті пропонується алгоритм оптимізації вибору площин, на яких розміщені томограми, що поступають з комп'ютерного томографа. Розглядається випадок, коли всі томограми паралельні одна одній. Запропонований алгоритм використовує наближення об'єктів класичними кусково-сталими сплайнами. При побудові алгоритму істотно використовується припущення про те, що внутрішня структура тривимірного тіла (щільність або коефіцієнт поглинання) є функцією від трьох змінних вигляду  $h(x, y, z) = f(x)g(y, z)$ , де  $g$  – довільна функція, при умові, що  $f$  – монотонна функція на замкнутому відрізку. Представлена чисельна реалізація методу оптимального вибору площин, на яких лежать томограми, в системі комп'ютерної математики MathCad.

**Ключові слова:** томограма, кусково-сталі сплайни, інтерфлетатція, мішана апроксимація.

**Ю. И. ПЕРШИНА, И. А. ТОКМАКОВА****ОПТИМАЛЬНЫЙ ВЫБОР ПЛОСКОСТЕЙ, НА КОТОРЫХ РАЗМЕЩЕНЫ ТОМОГРАММЫ, В КОМПЬЮТЕРНОЙ ТОМОГРАФИИ**

Представлено решение задачи восстановления внутренней структуры трехмерного тела по известным томограммам, поступающим от компьютерного томографа, с помощью интерфлетации функций и смешанной аппроксимации. Рассмотрены также известные методы приближения функций одной и двух переменных кусочно-постоянными сплайнами интерполяционного типа, с использованием средних и медиан.

© I. I. Pershyna, I. A. Tokmakova, 2019